משואות דיפרנציאליות רגילות מועד א' (104131)

- משך הבחינה שלוש שעות.
- אין להשתמש בשום חומר עזר (כולל מחשבון וטלפון סלולרי).
- יש להשתמש בעט כחול או שחור בלבד. אין להשתמש בעפרון!
- אין להפריד את דף השער מדפי הבחינה.
- סך הנקודות במבחן הוא 100 .
- הבחינה כוללת 8 שאלות .
- בשאלות הפתוחות (שאלות 1-3) יש לתת פתרון מלא, מנומק ומפורט, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.
- בשאלות האמריקאיות (שאלות 4-8) אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.
- יש לענות על הבחינה: **בטופס שאלון הבחינה בלבד. המחברות לא ייבדקו**

בהצלחה!

שאלות הפתוחות

<u>יש לתת פתרון מלא, מפורט ומנומק, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.</u>

שאלה 1 (23%)

א. מצא/י משפחת עקומים אשר אורתוגונליים למשפחה: $x^2+y^2=Ky,\ \ -\infty<K<\infty$

ב. מצא/י את העקומים משתי המשפחות שעוברים בנקודה $(1,2)$.

פתרון א

1. נחלץ את K: $K=\dfrac{x^2+y^2}{y}$

2. נגזור את משוואה של משפחה נתונה לפי x: $2x+2yy'=Ky'$

3. נחלץ את y': $y'=\dfrac{2x}{K-2y}$ ונציב את K: $y'=\dfrac{2x}{\dfrac{x^2+y^2}{y}-2y}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

4. נקבל משוואה למשפחה אורתוגונלית: $y'_\perp=-\dfrac{1}{y'}$ אז $y'_\perp=-\dfrac{x^2-y^2}{2xy}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

5. נפתור משוואה למשפחה אורתוגונלית (משוואה הומוגנית)

$y'_\perp=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, ההצבה: $u(x)=\dfrac{y}{x}$, $y=u(x)x$, $y'=u'x+u$

$u'x+u=\dfrac{u^2x^2-x^2}{2x^2u}=\dfrac{u^2-1}{2u}$ מכן $u'x=\dfrac{u^2-1}{2u}-u=\dfrac{u^2-1-2u^2}{2u}=-\dfrac{u^2+1}{2u}$

$\dfrac{2udu}{u^2+1}=-\dfrac{dx}{x}$, $\int\dfrac{2udu}{u^2+1}=-\int\dfrac{dx}{x}$, $\ln(u^2+1)=-\ln|x|+\ln C$, $\ln(u^2+1)=\ln\dfrac{C}{|x|}$

פתרון כללי: $\left(\dfrac{y^2}{x^2}+1\right)=\dfrac{C}{x}$ או $y^2+x^2=Cx$

פתרון ב

נציב את הנקודה $(1,2)$ במשפחה נתונה $K=\dfrac{5}{2}\Leftarrow 1^2+2^2=2K$ ונקבל העקום: $x^2+y^2=\dfrac{5y}{2}$

נציב את הנקודה $(1,2)$ במשפחה נתונה $C=5\Leftarrow 1^2+2^2=C$ ונקבל העקום: $x^2+y^2=5x$

העקומים האורתוגונליים אשר נחתכים בנקודה $(1,2)$ הם: $x^2+y^2=\dfrac{5y}{2}$ ו- $x^2+y^2=5x$

שאלה 2 (23%)

נתונה משוואה דיפרנציאלית $y''-y'=f(t)$ כאשר $f(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\pi\\ \cos t, & \pi\le t\end{cases}$

מצא/י באמצעות התמרת לפלס פתרון למשוואה המקיים את תנאי ההתחלה: $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

<u>רמז</u> $\cos\alpha=-\cos(\alpha-\pi)$.

פתרון

$$f(t)=-1+u_\pi(t)+(\cos t)u_\pi(t)=-1+u_\pi(t)-(\cos(t-\pi))u_\pi(t)$$

$$L\left[-1+u_\pi(t)-(\cos(t-\pi))u_\pi(t)\right](s)=-\frac{1}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}$$

$L\left[y''-y'\right](s)=s^2Y(s)-sY(s)=(s^2-s)Y(s)$, כאשר $L\left[y(t)\right](s)=Y(s)$

$$(s^2-s)Y(s)=-\frac{1}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}$$

$$Y(s)=-\frac{1}{s(s^2-s)}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2-s)}-\frac{e^{-\pi s}}{(s-1)(s^2+1)}$$

$\frac{1}{s(s^2-s)}=\frac{1}{s^2(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-1}$ אז $As(s-1)+B(s-1)+Cs^2=1$

$$\begin{array}{r|ll} s=0 & -B=1 & B=-1\\ s=1 & C=1 & \\ s^2 & A+C=0 & A=-1\end{array}$$

$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$ אז $A(s^2+1)+\left(Bs+C\right)(s-1)=1$

$$\begin{array}{r|ll} s=1 & 2A=1 & A=1/2\\ s^2 & A+B=0 & B=-1/2\\ s^0 & A-C=1 & C=-1/2\end{array}$$

$$,L^{-1}\left[\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}\right](t)=-1-t+e^t$$

$$,L^{-1}\left[e^{-\pi s}\left(\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}\right)\right](t)=\left(-1-(t-\pi)+e^t\right)u_\pi(t)$$

$$L^{-1}\left[e^{-\pi s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1}\right)\right](t)=L^{-1}\left[e^{-\pi s}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1}\right)\right](t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{t-\pi}-\cos(t-\pi)-\sin(t-\pi)\right)u_\pi(t)$$

$$L^{-1}\left[Y(s)\right](t)=1+t-e^t+\left(-1-(t-\pi)+e^{t-\pi}\right)u_\pi(t)-\frac{1}{2}\left(e^{t-\pi}+\cos(t)+\sin(t)\right)u_\pi(t)$$

פתרון הוא: $y(t)=1+t-e^t+\left(-1-(t-\pi)+e^{t-\pi}\right)u_\pi(t)-\frac{1}{2}\left(e^{t-\pi}+\cos(t)+\sin(t)\right)u_\pi(t)$

שאלה 3 (24%)

מצא/י פתרון של מערכת: $\bar{y}'=\begin{pmatrix}4&2&-1\\2&3&0\\1&2&2\end{pmatrix}\bar{y}$ המקיים תנאי ההתחלה: $\bar{y}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

<u>**רמז**</u> שורש אחד של פולינום האופייני שווה ל-1 $(\lambda=1)$

פתרון

1. (ע"ע): סכום איברים בכול שורה של מטריצה מקדמים הוא 5, אז $\lambda_1=5$.

$$\begin{vmatrix}4&2&-1\\2&3&0\\1&2&2\end{vmatrix}=15=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 \quad \text{לכן} \quad 5\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=15\Rightarrow\lambda_2\cdot\lambda_3=3$$

$$trace\begin{pmatrix}4&2&-1\\2&3&0\\1&2&2\end{pmatrix}=9=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \quad \text{לכן} \quad 5+\lambda_2+\lambda_3=9\Rightarrow\lambda_2+\lambda_3=4$$

מקבלים: $\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

2. ו"ע

ל-$\lambda_1=5$ ו"ע הוא $\bar{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

ל- $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{R_1 - 3R_3 \to R_1 \\ R_2 - 2R_3 \to R_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ -2v_2 - 2v_3 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 - v_3 = 2t - t = t \\ v_2 = -v_3 = -t \\ v_3 = t \end{cases} \Leftarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ל- $\lambda_3 = 3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_3 - R_1 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ 2v_1 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \frac{1}{2}v_3 = \frac{t}{2} \\ v_3 = t \end{cases} \Leftarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \bar{y}_1 = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_2 = e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}_3 = e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי: $\bar{y} = C_1 e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. פתרון פרטי

$$C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Leftarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_2 + C_3 = 1 \\ 2C_3 = 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

פתרון פרטי: $\bar{y}_{pr} = e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

שאלות האמריקאיות

<u>אין לרשום נימוקים. יש לסמן תשובה אחת בלבד, תשובה שגויה ובכלל זה סימון של יותר מתשובה אחת יגרור קבלת ניקוד 0.</u>

שאלה 4 (6%)

נתונה המשוואה $x^2y''-2y=x^2+\frac{1}{x}$, $x>0$. אז למשוואה יש פתרון פרטי מהצורה:

א. $y_{pr}=Ax^2\ln x+Bx(\ln x)^2$

ב. $y_{pr}=Ax(\ln x)^2+\frac{B}{x}\ln x$

ג. $y_{pr}=Ax^2\ln x+\frac{B}{x}\ln x$

ד. $y_{pr}=Ax(\ln x)^2+Bx\ln x$

ה. $y_{pr}=A(\ln x)^2+B\ln x$

פתרון

משוואת אוילר: הצבה $x=e^t,\ t=\ln x$. פ"א: $r(r-1)-2=0$,

$r^2-r-2=0 \Leftarrow r_1=-1,\ r_1=2$, $f(t)=e^{2t}+e^{-t}$.

$e^{2t}\rightarrow y_{p1}=Ate^{2t}$

$e^{-t}\rightarrow y_{p2}=Bte^{-t}$

$$y_{pr}(x)=A(\ln x)x^2+B(\ln x)\frac{1}{x}\Leftarrow y_{pr}(t)=y_{p1}+y_{p2}=Ate^{2t}+Bte^{-t}$$

שאלה 5 (6%)

נתונה המשוואה $y'=y(y-\cot x)-\frac{1}{\sin^2 x}$ בתחום $0<x<\pi$, ויהי $y(x)$ פתרון שלה המקיים תנאי ההתחלה: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ אז $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$ שווה ל:

א. $\sqrt{3}$

ב. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ג. -1

ד. 1

ה. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון

משוואה מקיימת משפט קיום ויחידות: $f(x,y)=y\left(y-\cot x\right)-\frac{1}{\sin^2 x}$ פונקציה רציפה בתחום הנתון סביב נקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ו- $f'_y(x,y)=2y-\cot x$ פונקציה רציפה בתחום הנתון סביב נקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. למשוואה קיים פתרון אחד ויחיד שעובר דרך נקודה $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ וזה פתרון $y=\cot x$. אז

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

שאלה 6 (6%)

נתונה המשוואה $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ עם תנאי ההתחלה: $y(0)=y'(0)=1$. נכתוב את הפתרון בצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. אז $a_2\cdot a_4$ של הפתרון שווה ל:

א. $\frac{1}{3}$

ב. $-\frac{1}{3}$

ג. $\frac{1}{16}$

ד. $-\frac{1}{16}$

ה. 0

פתרון

המקדמים a_n שווים $a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}$ אז $a_2=-1\Leftarrow y''(0)=-2\Leftarrow(1-0)y''(0)-0+2=0$

נגזור המשוואה ונקבל:

$$y'''(0)=0\Leftarrow -4xy''+(1-x^2)y'''=0\Leftarrow -2xy''+(1-x^2)y'''-2y'-2xy''+2y'=0$$

נקבל עוד נגזרת: $a_4=\frac{-8}{4!}=-\frac{1}{3}\Leftarrow y^{(4)}(0)=-8\Leftarrow -4y''-4xy'''-2xy'''+(1-x^2)y^{(4)}=0$

$$a_2\cdot a_4=\frac{1}{3}$$

שאלה 7 (6%)

נתונה המשוואה $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$ בתחום $x>0$. ידוע פתרון אחד של משוואה $y_1=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. פתרון שני של המשווה הוא:

א. $y_2=\frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}$

ב. $y_2=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

ג. $y_2=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$

ד. $y_2=\sqrt{x}\cos x$

ה. $y_2=\sqrt{x}\sin x$

פתרון

נעשה נרמול של משוואה: $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{x^2}y=0$, המקדמים רציפים לכל $x>0$.

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{W(x)}{y_1^2}$. הוורונסקיאן הוא: $W(x)=Ce^{-\int\frac{dx}{x}}=Ce^{-\ln x}=\frac{C}{x}$

$$\frac{y_2}{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}=\int\frac{\frac{C}{x}}{\frac{\cos^2 x}{x}}dx=C\int\frac{dx}{\cos^2 x}=C\tan x$$

$$y_2=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Leftarrow y_2=C\tan x\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=C\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

שאלה 8 (6%)

נתונה המשוואה $y'-\frac{2x}{1-x^2}y=-\frac{x^3}{1-x^2}$. התחום הגדרה של הפתרון המקיים את התנאי ההתחלה $y(-4)=4$ הוא:

א. $(-\infty,-1)$

ב. $(-\infty,\infty)$

ד. $(-1,1)$

ג. $(1,\infty)$

ה. $(0,\infty)$

פתרון

המשוואה נתונה היא משוואה ליניארית, אז פתרון מוגדר בכל תחום הגדרה של המשוואה לפי משפט קיום ויחידות. מקדמים של משוואה לא רציפים בנקודות $x=1,\ x=-1$ ונקודת ההתחלה $x=-4$.

אז תחום הגדרה של המשוואה ופתרון המקיים תנאי ההתחלה הנתון הוא קטע $(-\infty,-1)$

טבלת התמרת לפלס

N	$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right](t)$	$F(s)=L\left[f(t)\right](s)$
1	$k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)$	$k_1F_1(s)+k_2F_2(s)$
2	$f(kt),\ k>0$	$\frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$
3	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
4	$t^n\cdot f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
5	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
6	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s},\ s>0$
7	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
8	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
9	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
10	1	$\frac{1}{s},\ s>0$
11	e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$

12	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ \ s>0$
13	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ \ s>a$
14	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ \ s>0$
15	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ \ s>0$
16	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
17	$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$